

Geometria I (Test di Algebra Lineare)

Lunedì 25 novembre 2013

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad f_k((x, y, z)) = (x + 2y + (k + 2)z, -y - kz, (k + 1)x + 3y + 5z)$$

(a) Scrivere la matrice M_k che rappresenta f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$; successivamente determinare (al variare del parametro) le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k . 7

(b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'omomorfismo f_k è iniettivo. 1

Sia d'ora in poi $k = 1$.

(c) Determinare una base per il nucleo e una per l'immagine di f_1 . 3

(d) Risolvere il sistema $M_1 \vec{v} = \vec{b}$ dove $\vec{v} = (x, y, z)$ e $\vec{b} = (1, 0, 2)$ e stabilire se l'insieme S delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. In ogni caso determinare una base per S . 4

(e) Dire, motivando la risposta, per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $(2\alpha, 3, -3\alpha)$ appartiene alla chiusura di S . 2

Esercizio 2. Data la matrice di $\text{Mat}_4(\mathbb{R})$,

$$X_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 & 0 \\ 8 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

(a) determinare i valori di α per i quali X_α possiede tre autovalori distinti; 3

(b) studiare la diagonalizzabilità di X_α per $\alpha = -2$; 2

(c) posto $\alpha = 6$, determinare una matrice D diagonale e una matrice M tali che $D = M^{-1}X_6M$. 5

Esercizio 3. Si consideri $V := \mathbb{C}_1[x] = \{\alpha + \beta x : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ (dotato delle usuali operazioni di somma tra polinomi e prodotto per scalari complessi).

- (a) Dire se gli insiemi seguenti sono sottospazi di $V(\mathbb{C})$:

$$U = \{a + bx \in \mathbb{C}_1[x] : a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{\alpha x \in \mathbb{C}_1[x] : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

3

- (b) Qualora U e W siano sottospazi di $V(\mathbb{C})$, indicarne una base e la dimensione. 2

- (c) Ricordando che V può essere considerato non solo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, ma anche spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, stabilire (determinando opportune basi) le dimensioni di V su $\mathbb{R}$ e di V su $\mathbb{C}$. 3